SOCIETÀ NAZIONALE DI SCIENZE, LETTERE E ARTI IN NAPOLI

# RENDICONTO
# DELL'ACCADEMIA DELLE SCIENZE
# FISICHE E MATEMATICHE

SERIE IV - VOL. LI/2 - ANNO CXXIII

(1984)


LIGUORI EDITORE

Pubblicato da Liguori Editore
Via Mezzocannone 19, 80134 Napoli



Prima edizione italiana Settembre 1985

9 8 7 6 5 4 3 2 1 0

1990 1989 1988 1987 1986 1985

*Le cifre sulla destra indicano il numero e l'anno dell'ultima ristampa*

Printed in Italy. Liguori Editore, Napoli

ISBN 88 - 207 - 1458-2

INDICE

# UNA PROPRIETA' DEI P-GRUPPI METACICLICI

Nota di Patrizia Longobardi e di Mercede Maj
Presentata dal Socio Mario Curzio
Adunanza del 10/11/1984

Riassunto - Nella presente nota si dimostra il teorema seguente:
Teorema - Sia G un p-gruppo metaciclico, non abeliano e $\neq Q_8$. Esiste allora un sottogruppo $C \lhd G$ tale che: (i) G/C è ciclico; (ii) non esiste $X \leqslant C$, con X ciclico, $X \lhd G$ e G/X ciclico; (iii) per ogni sottogruppo massimale M di G esiste un quoziente $M/X_M$ ciclico, con $X_M$ ciclico e $X_M \leqslant C \cap M$.

Abstract - In this paper we prove the following theorem:
Theorem - Let G be a metacyclic p-group, with G not abelian and $G \neq Q_8$. Then there exists a subgroup $C \lhd G$ such that: (i) G/C is cyclic; (ii) C does not contain a cyclic subgroup X, with $X \lhd G$ and G/X cyclic; (iii) for every maximal subgroup M of G there exists a cyclic factor group $M/X_M$, where $X_M$ is cyclic and $X_M \leqslant C \cap M$.

I gruppi finiti minimali non metaciclici sono stati classificati da N. Blackburn [1] e da M. Curzio [2], alcuni dei gruppi siffatti ([2], Theorem 2.10) sono costruibili a partire dalla classe $\mathcal{K}$ riempita dai gruppi G verificanti le condizioni seguenti:

(i) G è un p-gruppo metaciclico e possiede un sottogruppo C, con G/C ciclico, tale che non esiste $X \leqslant C$, con X ciclico, $X \lhd G$ e G/X ciclico;

(ii) per ogni sottogruppo massimale M di G esiste un quoziente ciclico $X/X_M$, con $X_M$ ciclico e $X_M \leqslant C \cap M$.

Risulta del tutto ovvio che a $\mathcal{K}$ non appartengono nè il gruppo dei quaternioni $Q_8$ nè i p-gruppi metaciclici abeliani; nella presente nota si descrive $\mathcal{K}$, ottenendo il

Teorema - La classe $\mathcal{K}$ è costituita dai p-gruppi metaciclici non abeliani e non isomorfi a $Q_8$.

---

(°) Indirizzo degli autori: Dipartimento di Matematica ed Applicazioni "R. Caccioppoli" - via Mezzocannone, 8 - 80134 NAPOLI

(°°) Lavoro eseguito nell'ambito del G.N.S.A.G.A..

N.1. Alla dimostrazione del teorema si premettono le osservazioni seguenti:

1.1. (cfr. [3]) Sia $p$ un primo $>2$. Per ogni $i \geq 1$ e per ogni $k \geq 0$ si ha $\binom{p^k}{i} p^i \equiv 0 \pmod{p^{k+2}}$, mentre $\binom{2^k}{i} 2^i \equiv 0 \pmod{2^{k+1}}$.

1.2. Siano $p$ un primo ed $\alpha$, $s$, $h$ dei numeri naturali. Se $p>2$ o se $s \neq 1$, si ha $(1+\alpha p^s)^{p^h} = 1 + \alpha p^{s+h} + c\alpha p^{s+h+1}$, dove $c$ è un intero.

Dim. Segue facilmente da 1.1.. △

1.3. Siano $a$, $b$ elementi di un $p$-gruppo $G$. Se $a^b = a^{1+\delta p^s}$, si ha

$(ba)^i = b^i a^{\frac{(1+\delta p^s)^i - 1}{\delta p^s}}$, per ogni $i \geq 1$.

Dim. Per induzione su $i$. △

1.4. Sia $G = \langle a,b \rangle$ un $p$-gruppo metaciclico tale che $a^b = a^{1+\delta p^s}$, con $\delta \geq 0$ e $\delta \not\equiv 0 \pmod{p}$. Si ha:

$[a,b^p] = \langle a^{p^{s+1}} \rangle$ se $p>2$ o se $s \neq 1$, mentre

$[a,b^2] = \langle a^{4\delta(1+\delta)} \rangle$ se $p = 2$ ed $s = 1$.

Dim. Sia in primo luogo $p \neq 2$ oppure $s \neq 1$.

Per la 1.3. risulta $[a,b^p] = a^{-1}b^{-p}ab^p = a^{-1}a^{(1+\delta p^s)^p} = a^{-1}a^{1+\delta p^{s+1}+c\delta p^{s+2}} =$

$= (a^{p^{s+1}})^{(\delta+c\delta p)}$, ed essendo per ipotesi $\delta \not\equiv 0 \pmod{p}$, si ottiene $\langle [a,b^p] \rangle =$

$= \langle a^{p^{s+1}} \rangle$, come volevasi.

Se poi $p = 2$ ed $s = 1$, riesce $[a,b^2] = a^{-1}b^{-2}ab^2 = a^{-1}a^{(1+2\delta)^2} = a^{4\delta(1+\delta)}$. △

Si dimostrerà il teorema precedentemente enunciato.

Teorema - La classe $\mathcal{X}$ è costituita dai $p$-gruppi metaciclici non abeliani e non isomorfi a $Q_8$.

Dim. Sia $G$ un $p$-gruppo metaciclico non abeliano e non isomorfo a $Q_8$.

E' $G = \langle a,b \rangle$, con $a^b = a^{1+\delta p^s}$, con $\delta > 0$, $\delta \not\equiv 0 \pmod{p}$.

Ogni sottogruppo massimale $M$ di $G$ è di uno dei tipi:

$M = \langle a, b^p \rangle$ , oppure $M = \langle a^p, ba^\alpha \rangle$ , con $0 \leq \alpha < p$.

Si distingueranno i casi seguenti:

(j) E' $\langle b \rangle \not\lhd G$ e $\langle b^p \rangle \lhd G$.

Posto $C = \langle a^{p^s}, b \rangle$, si ha $C \lhd G$ e $G/C$ ciclico.

Sia M massimale in G. Se $M = \langle a, b^p \rangle$ , si ha $\langle b^p \rangle \lhd M$, $M/\langle b^p \rangle$ ciclico, $\langle b^p \rangle \leqslant C$. Se invece $M = \langle a^p, ba^\alpha \rangle$ $(0 \leq \alpha < p)$, si ha, se $s = 1$, $\langle a^p \rangle \lhd M$, $\langle a^p \rangle \leqslant C$ e $M/\langle a^p \rangle$ ciclico; se poi $s \neq 1$ e $\alpha > 0$, da $b^{-p}(ba^\alpha)^p =$

$= b^{-p} b^p (a^\alpha)^{\frac{(1+\delta p^s)^p - 1}{\delta p^s}} = a^{\alpha p + \alpha p^2 h} = (a^p)^{\alpha + \alpha p h}$, con $\alpha \not\equiv 0 \pmod p$ (cfr. 1.3.) segue $a^p \in \langle b^p, ba^\alpha \rangle$ cioè $M = \langle b^p, ba^\alpha \rangle$ e ancora $\langle b^p \rangle \lhd M$, $\langle b^p \rangle \leqslant C$, $M/\langle b^p \rangle$ ciclico. Se infine $s \neq 1$ e $\alpha = 0$, è facile riconoscere che è $\langle b \rangle \lhd M$, e $M/\langle b \rangle$ ciclico.

Infine non esiste $X \leqslant C$, X ciclico, $X \lhd G$, con $G/X$ ciclico, altrimenti si avrebbe $X = \langle a^{p^s}, b^h \rangle$, e $\langle b^h \rangle \leqslant \langle a^{p^s} \rangle$ oppure $\langle a^{p^s} \rangle \leqslant \langle b^h \rangle$. Ma $a^{p^s} \notin \langle b \rangle$ $(\langle b \rangle \not\lhd G)$, pertanto riuscirebbe $X = \langle a^{p^s} \rangle$ e $G/X$ non ciclico.

Pertanto C è nelle condizioni richieste.

(jj) E' $\langle b \rangle \lhd G$;

Si ha $G' \leqslant \langle a \rangle$, $G' \leqslant \langle b \rangle$; pertanto $G' \leqslant Z(G)$. E' lecito inoltre supporre $o(a) \geq o(b)$.

Si ha $G' = \langle a^{p^s} \rangle$, posto $\langle a \rangle \cap \langle b \rangle = \langle b^{p^h} \rangle = \langle a^{p^c} \rangle$, da $G' \leqslant \langle b \rangle$ e dall'essere G non abeliano, segue $c \leq s$ e $a^{p^s} \neq 1$; è poi lecito assumere $a^{p^c} = b^{p^h}$. Riesce allora $1 = \left[a, b^{p^h}\right] = \left[a, b\right]^{p^h} = a^{\delta p^{s+h}}$ $(\delta \not\equiv 0 \pmod p)$, sicché $o(a) \leq p^{s+h}$ e da $o(b) \leq o(a)$ segue $c \geq h$; sia ad esempio $c = h+t$.

Non può essere $h > s$, altrimenti da $c \geq h > s$ seguirebbe $c > s$, pertanto è $h \leq s$.

Posto $y = a^{p^t + p^{s-h+1}} b^{-1}$, si ha allora $y^{p^h} = (a^{p^t + p^{s-h+1}} b^{-1})^{p^h} =$

$= a^{p^c} a^{p^{s+1}} b^{-p^h} \left[a^{p^t + p^{s-h+1}}, b\right]^{\frac{p^h(p^h-1)}{2}}$, e quindi, se $h > 2$ o se $h > 1$ e $p \neq 2$, o se $h > 1$ e $t > 0$, riesce $y^{p^h} = (a^{p^{s+1}})^r$, $r \not\equiv 0 \pmod p$, e $a^{p^{s+1}} \in \langle y \rangle$, mentre si verifica facilmente che $a^p \notin \langle y \rangle$. Si ha allora $G = \langle a, y \rangle$, con $\langle y \rangle \not\lhd G$ e $\langle y^p \rangle \lhd G$ e si è nel caso (j).

Se poi $p = 2$, $h = 2$, $t = 0$, si ha $a^4 = b^4$ e $(ab^{-1})^4 = a^4 (b^{-1})^4 \left[a, b\right]^6 =$

$= [a,b]^6$ e, posto $y = ab^{-1}$, ancora $G = \langle a,y\rangle$ con $\langle y\rangle \not\lhd G$ e $\langle y^2\rangle \lhd G$, e si è nel caso (j).

Infine se $h = 1$, si ha $b^p \in \langle a\rangle$, e G ha un sol sottogruppo di ordine p, oppure $G = [\langle a\rangle]\langle y\rangle$ con $y^p = 1$. Se $G = [\langle a\rangle]\langle y\rangle$ con $y^p = 1$, si è nel caso (j). Se invece G ha un solo sottogruppo di ordine p, G è quaternionale e da $\langle b\rangle \lhd G$ segue $G \simeq Q_8$, contro le ipotesi.

(jjj) Sia ora infine $\langle b^p\rangle \not\lhd G$.

Posto $\langle a\rangle \cap \langle b\rangle = \langle b^{p^h}\rangle$, è $[a,b^p] \notin \langle b\rangle$, sicché (cfr. Osservazione 2), si ha $b^{p^h} = (a^{p^{s+2}})^r$, se $p \neq 2$ o $s \neq 1$, $b^{2^h} = (a^{8(1+\delta)})^r$, se $p = 2$ e $s = 1$.

Se $h \leq s+1$, posto $y = ba^{p^{s+1-h}}$, si ha, se $p \neq 2$ o se $s \neq 1$,

$$y^{p^h} = b^{p^h}(a^{p^{s+1-h}})^{\frac{(1+\delta p^s)^{p^h}-1}{\delta p^s}} = b^{p^h}a^{p^{s+1}+cp^{s+2}},$$ sicché $\langle a^{p^{s+1}}\rangle = \langle [a,b^p]\rangle = \langle [a,y^p]\rangle \leq \langle y^p\rangle$ e $\langle y^p\rangle \lhd G = \langle a,y\rangle$ e si è in uno dei casi precedenti; se invece $p = 2$, $s = 1$, si può assumere $h = 2$ [1] e $y = ba$. Si ha allora:

$$y^4 = (ba)^4 = b^4 a^{\frac{(1+2\delta)^4-1}{2\delta}} = b^4 a^{4(1+\delta)(1+2\delta+2\delta^2)}$$ e ancora $[a,b^2] = [a,y^2] \in \langle y^2\rangle$, $\langle y^2\rangle \lhd G = \langle a,y\rangle$ e si è in uno dei casi precedenti.

Infine, se $h > s+1$, posto $y = b^{p^{h-s-1}}a$, si ha, se $p \neq 2$ o $s \neq 1$, $[a,b^{p^{h-s-1}}] = a^{-1}a^{(1+\delta p^s)^{p^{h-s-1}}} = a^{-1}aa^{\delta p^{h-1}}a^{\delta cp^h} = a^{\gamma p^{h-1}}$, con $\gamma \not\equiv 0 \pmod p$, e $y^{p^{s+1}} = (b^{p^{h-s-1}}a)^{p^{s+1}} = b^{p^h}a^{\frac{(1+\gamma p^{h-1})^{p^{s+1}}-1}{\gamma p^{h-1}}} = b^{p^h}a^{\gamma p^{s+1}}a^{\gamma cp^{s+2}} = (a^{p^{s+1}})^\beta$ con $\beta \not\equiv 0 \pmod p$, cioè $a^{p^{s+1}} \in \langle y\rangle$, e $[y,b^p] \in \langle y\rangle$; se invece $p = 2$ e $s = 1$, si ha $y = b^{2^{h-2}}a$ e $y^{2^{s+1}} = (b^{2^{h-2}}a)^4 = b^{2^h}a^4[a,b^{2^{h-2}}]^t$. Ma $[a,b^{2^{h-2}}] \in \langle [a,b^2]\rangle \leq \langle a^8\rangle$, pertanto $a^4 \in \langle y\rangle$ e quindi ancora $[y,b^2] = [a,b^2] \in \langle y\rangle$.

Posto allora $C = \langle y,a^p\rangle$ si ha $C \lhd G$ e $G/C = \langle C,b\rangle/C$ ciclico. Per ogni M massimale in G, se $M = \langle a,b^p\rangle$ si ha $y \in M$ e $M = \langle y,b^p\rangle$ sicché $\langle y\rangle \lhd M$,

---

[1] Se fosse $h = 1$, si avrebbe $b^2 \in \langle a\rangle$ e $\langle b^2\rangle \lhd G$.

$M/\langle y\rangle$ ciclico e $\langle y\rangle \leqslant C$; se invece $M = \langle a^p, ba^\alpha\rangle$ è $\langle a^p\rangle$ nelle condizioni richieste.

Infine non esiste $X \leqslant C$, $X$ ciclico, $X \lhd G$ con $G/X$ ciclico. Infatti se esistesse un tale $X$, si avrebbe $\langle bX\rangle \leqslant \langle aX\rangle$ oppure $\langle aX\rangle \leqslant \langle bX\rangle$. Non può essere $\langle bX\rangle \leqslant \langle aX\rangle$, altrimenti $b \in \langle a, C\rangle \leqslant \langle a, b^p\rangle$, pertanto riuscirebbe $\langle aX\rangle \leqslant \langle bX\rangle$, cioè $ab^{-r} \in X$, per un opportuno intero $r$. Da $ab^{-r} \in C$, $G' \leqslant C$, $b^{p^{h-s-1}}a \in C$, seguirebbe allora $a^{-1}b^r \in C$ e quindi $b^{p^{h-s-1}+r} \in C$.

Ma $C \cap \langle b\rangle = \langle b^{p^{h-s}}\rangle$ (2), si avrebbe quindi $r = tp^{h-s-1}$, con $t \not\equiv 0 \pmod p$; e da $X$ ciclico e $a^{p^s} \in X$ seguirebbe $ab^{-r} \in \langle a^{p^s}\rangle$ oppure $a^{p^s} \in \langle ab^{-r}\rangle$. Ma da $ab^{-r} \in \langle a^{p^s}\rangle$ segue $b^r \in \langle a\rangle$, contro l'essere $\langle b\rangle \cap \langle a\rangle = \langle b^{p^h}\rangle$; da $a^{p^s} \in \langle ab^{-r}\rangle$, segue invece $(ab^{-r})^\lambda = a^{p^s}$, per un opportuno intero $\lambda$, da cui $b^{r\lambda} \in \langle a\rangle$, cioè $b^{tp^{h-s-1}\lambda} \in \langle a\rangle \cap \langle b\rangle = \langle b^{p^h}\rangle$, e quindi $\lambda \equiv 0 \pmod{p^{s+1}}$, contro l'essere $[b^{-r}, a] \subset \langle [a, b^p]\rangle \leqslant \langle a^{p^{s+1}}\rangle$, e $(ab^{-r})^\lambda = a^\lambda (b^{-r})^\lambda [b^{-r}, a]^m = a^{p^s}$. △

---

(2) Da $(b^{p^{h-s-1}})^p \in C$ e da $a^p \in C$ segue $b^{p^{h-s}} \in C$.

Non può poi essere $b^{p^{h-s-1}} \in C$, altrimenti si avrebbe $a \in C$, cioè $a = (a^p)^n (b^{p^{h-s-1}}a)^m$, per un opportuno intero $m$, da cui $(b^{p^{h-s-1}})^m \in \langle a\rangle$ cioè $p^{s+1} \equiv 0 \pmod m$ e $a \in \langle b, a^p\rangle$, un assurdo.

## BIBLIOGRAFIA


[1] N. Blackburn - Generalizations of certain elementary theorems on p-groups, Proc. London Math. Soc. 11 (1961) 1-22.

[2] M. Curzio - Classification of finite minimal non metacyclic groups, Acta Scientiarum Math. Szeged (1984), in corso di stampa.

[3] B. Huppert - Endliche Gruppen I, Springer, Berlin 1967.



La presente nota è stata giudicata degna di pubblicazione da una commissione composta dai soci M. Curzio, A. Franchetta e D. Greco.

# GRUPPI INFINITI SUPERSOLUBILI
# CON IL RETICOLO DEI SOTTOGRUPPI NORMALI DISTRIBUTIVO

(°) (°°)
Nota di Mercede Maj

Presentata dal Socio Mario Curzio

Adunanza del 10/11/1984

Riassunto - Nella presente nota si studiano i gruppi supersolubili infiniti con il reticolo dei sottogruppi normali distributivo. Si ottengono i seguenti teoremi:
Teorema 1 - Sia G un gruppo supersolubile infinito. n(G) è distributivo se, e solo se, n(G/N) è distributivo, per ogni sottogruppo normale N di indice finito in G.
Teorema 2 - Sia G un gruppo supersolubile infinito. n(G) è distributivo se, e solo se, G soddisfa le condizioni seguenti:
(i) $G = [G'] \langle x \rangle$, con G' finito e di ordine dispari;
(ii) Z(G/N) è ciclico, per ogni $N \lhd G$;
(iii) n(G/Z(G)) è distributivo.

Abstract - Infinite supersoluble groups having a distributive lattice of normal subgroups are studied. We get the following theorems:
Theorem 1 - Let G be an infinite supersoluble group. Then n(G) is distributive if and only if n(G/N) is distributive, for any normal subgroup N of finite index.
Theorem 2 - Let G be an infinite supersoluble group. Then n(G) is distributive if and only if G satisfies the following conditions:
(i) $G = [G'] \langle x \rangle$, where G' is finite of odd order;
(ii) Z(G/N) is cyclic, for any $N \lhd G$;
(iii) n(G/Z(G) is distributive.

I sottogruppi normali di un gruppo G costituiscono un sottoreticolo modulare n(G) del reticolo $\mathcal{L}(G)$ dei sottogruppi di G.

In [2] sono stati studiati i gruppi finiti G a derivato nilpotente con

---

(°) Indirizzo dell'autore: Dipartimento di Matematica ed Applicazioni "R. Caccioppoli" - via Mezzocannone, 8 - 80134 NAPOLI

(°°) Lavoro eseguito nell'ambito del G.N.S.A.G.A. (C.N.R.).

n(G) distributivo, e sono stati ottenuti i seguenti risultati:

Teorema $A_1$ - Un gruppo finito G a derivato nilpotente ha il reticolo n(G) distributivo se, e solo se, ogni suo quoziente G/H ha un carattere irriducibile e fedele.

Teorema $A_2$ - Sia G un gruppo finito con derivato nilpotente.
Sono allora equivalenti:
(1) n(G) è distributivo;
(2) esiste un elemento $x \in G$ tale che $G = \langle G', x \rangle$ e $n(P\langle x \rangle)$ è distributivo, per ogni $P \in Syl(G')$;
(3) esiste un elemento $x \in G$ tale che $G = \langle F(G), x \rangle$ e $n(P\langle x \rangle)$ è distributivo, per ogni $P \in Syl(F(G))$.

Teorema B - Un gruppo supersolubile finito $G = [G_p]\langle x \rangle$ ha n(G) distributivo se, e solo se, si ha $a \in \langle b \rangle^{G_p}$ o $b \in \langle a \rangle^{G_p}$, se a e b sono elementi di $G_p$ tali che $a^x = a^r$ e $b^x = b^r$ (r intero).

Vengono ora studiati i gruppi infiniti supersolubili aventi il reticolo dei sottogruppi normali distributivo, e si perviene ai seguenti teoremi:

Teorema 1 - Sia G un gruppo supersolubile infinito.
n(G) è distributivo se, e solo se, n(G/N) è distributivo, per ogni sottogruppo normale N di indice finito in G.

Teorema 2 - Sia G un gruppo supersolubile infinito.
n(G) è distributivo se, e solo se, G soddisfa le condizioni seguenti:
(i) $G = [G']\langle x \rangle$, con G' finito e di ordine dispari;
(ii) Z(G/N) è ciclico, per ogni $N \lhd G$;
(iii) n(G/Z(G)) è distributivo.

Notazioni e nomenclatura sono per lo più quelle usuali in teoria dei gruppi (cfr. ad es. [1] e [3]); in particolare: G' è il derivato di G, Z(G) il centro di G, F(G) il sottogruppo di Fitting, $G_p$ un p-sottogruppo di Sylow (p primo), $H^G$ la chiusura normale di $H \leqslant G$, $G = [H]K$ un prodotto semidiretto di $H \lhd G$ e $K \leqslant G$, $Z_n(G)$ l'n-simo termine della serie centrale ascendente di G ($n \in \mathbb{N}_0$ ; $Z_0(G) = Z(G)$).

Proposizione 1 - Sia G un gruppo supersolubile infinito, e sia n(G/N)

distributivo, per ogni N normale in G e di indice finito.
Allora è $G = [G'] \langle x \rangle$, con G' finito (nilpotente) di ordine dispari e x aperiodico.

Dim. G ha una serie caratteristica $1 \leqslant L \leqslant M \leqslant G$, con L finito di ordine dispari, M/L finitamente generabile nilpotente ed aperiodico, G/M 2-gruppo finito (cfr. ad es. [3], Part 1, p. 67). Detta n la classe di nilpotenza di M/L, è $\frac{M/L}{Z_{n-1}(M/L)}$ abeliano aperiodico finitamente generabile; pertanto risulta $\frac{M/L}{Z_{n-1}(M/L)}$ ciclico, altrimenti esisterebbe S/L caratteristico in M/L con $\frac{M}{S} \simeq \frac{M/L}{S/L}$ 2-gruppo abeliano elementare finito non ciclico, e G/S sarebbe un 2-gruppo finito non ciclico con n(G/S) distributivo, un assurdo.
E' quindi M/L ciclico infinito. Esiste allora una successione $(X_n/L)_{n \in \mathbb{N}}$ di sottogruppi di M/L, caratteristici in M/L, tali che $\left| \frac{M/L}{X_n/L} \right| = 2^n$, per ogni n, e $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} \frac{X_n}{L} = \frac{L}{L}$.
Per ogni $n \in \mathbb{N}$, $G/X_n$ è un 2-gruppo finito con $n(G/X_n)$ distributivo, quindi $G/X_n$ è ciclico e G/L è abeliano. Ma allora G/L è un gruppo abeliano infinito, finitamente generabile, a quozienti finiti ciclici, pertanto G/L è ciclico e $G' \leqslant L$. E' poi G/G' abeliano infinito, finitamente generabile, a quozienti finiti ciclici, da cui G/G' è ciclico e G' = L.

Pertanto è $G = [G'] \langle x \rangle$, con G' nilpotente finito di ordine dispari e x aperiodico. △

Teorema 1 - Sia G un gruppo supersolubile infinito.
n(G) è distributivo se, e solo se, n(G/N) è distributivo, per ogni N normale in G e di indice finito.

Dim. La condizione necessaria è ovvia.

Viceversa, si supponga G tale che n(G/N) è distributivo, per ogni N normale in G e di indice finito. Allora (cfr. Proposizione 1) è $G = [G'] \langle x \rangle$, con G' finito e x aperiodico. Esiste quindi un numero naturale k tale che è $\langle x^k \rangle \leqslant Z(G)$, e, da $G/\langle x^k \rangle$ finito, segue $n(G/\langle x^k \rangle)$ distributivo.

Siano ora N, M, T normali in G, con $N \vee M = M \vee T = N \vee T$ e $N \wedge M = N \wedge T = M \wedge T$. Se $N \wedge M \wedge \langle x \rangle \neq 1$, $G/N \wedge M$ è finito, quindi $n(G/N \wedge M)$ è distributivo e N = M = T.
Se invece è $N \wedge M \wedge \langle x \rangle = 1$, riesce, per esempio, $N \wedge \langle x^k \rangle = 1$, sicché è $N \simeq \frac{N\langle x^k \rangle}{\langle x^k \rangle} \leqslant \frac{G}{\langle x^k \rangle}$ e N è finito; da $\frac{N}{N \wedge M} \simeq \frac{T}{N \wedge M} \simeq \frac{M}{N \wedge M}$ segue poi che anche M e T sono finiti. Risulta allora $N\langle x^k \rangle \vee M\langle x^k \rangle = N\langle x^k \rangle \vee T\langle x^k \rangle =$

$M\langle x^k\rangle \vee T\langle x^k\rangle$ e $N\langle x^k\rangle \wedge M\langle x^k\rangle = \langle x^k\rangle (N\wedge M)$ [1] $= N\langle x^k\rangle \wedge T\langle x^k\rangle =$
$= M\langle x^k\rangle \wedge T\langle x^k\rangle$, sicché, da $n(G/\langle x^k\rangle)$ distributivo, segue $N\langle x^k\rangle =$
$= M\langle x^k\rangle = T\langle x^k\rangle$ e $N = M = T$, per la finitezza di N, M, T.

Pertanto n(G) è distributivo. △

Teorema 2 - Sia G un gruppo supersolubile infinito.

n(G) è distributivo se, e solo se, G verifica le condizioni seguenti:

(i) $G = [G']\langle x\rangle$, con G' finito di ordine dispari;

(ii) Z(G/N) è ciclico, per ogni $N \lhd G$;

(iii) n(G/Z(G)) è distributivo.

Dim. La condizione necessaria segue subito dalla Proposizione 1.

Viceversa, G verifichi le tre condizioni dell'enunciato, e, per assurdo, esistano N, M, T normali in G, a due a due distinti, con $N\vee M = N\vee T = M\vee T$, $M\wedge N = N\wedge T = M\wedge T$ e con $G/N\wedge M$ finito (cfr. Teorema 1)

E' lecito supporre allora $\left|\frac{N}{N\wedge M}\right| = \left|\frac{M}{N\wedge M}\right| = \left|\frac{T}{N\wedge M}\right| = p$, sicché ogni elemento di G induce la stessa potenza su ogni elemento di $\left(\frac{N}{N\wedge M}\times\frac{M}{N\wedge M}\right) - \{1\}$.

Pertanto è $\frac{N}{N\wedge M}, \frac{M}{N\wedge M}, \frac{T}{N\wedge M} \leqslant Z\left(\frac{G}{N\wedge M}\right)$, oppure $\frac{N\vee M}{N\wedge M} \wedge \frac{Z(G)(N\wedge M)}{N\wedge M} = 1$.

Nel primo caso, da $Z(G/N\wedge M)$ ciclico, segue l'assurdo $N = M = T$.

Nel secondo caso, si ha $\frac{NZ(G)}{(N\wedge M)Z(G)} \wedge \frac{MZ(G)}{(N\wedge M)Z(G)} = 1$ [2] $= \frac{NZ(G)}{(N\wedge M)Z(G)} \wedge$

$\wedge \frac{TZ(G)}{(N\wedge M)Z(G)} = \frac{MZ(G)}{(N\wedge M)Z(G)} \wedge \frac{TZ(G)}{(N\wedge M)Z(G)}$, e $\frac{NZ(G)}{(N\wedge M)Z(G)} \vee \frac{MZ(G)}{(N\wedge M)Z(G)} =$

$= \frac{NZ(G)}{(N\wedge M)Z(G)} \vee \frac{TZ(G)}{(N\wedge M)Z(G)} = \frac{MZ(G)}{(N\wedge M)Z(G)} \vee \frac{TZ(G)}{(M\wedge N)Z(G)}$, con NZ(G), MZ(G), TZ(G)

---

(1) E' $N\langle x^k\rangle \wedge M\langle x^k\rangle = \langle x^k\rangle (N\wedge M)$. Infatti, da N finito e da $M\langle x^k\rangle = M \times \langle x^k\rangle$, con M finito, segue che $N\wedge(M\langle x^k\rangle) \leqslant N\wedge M$, e $N\langle x^k\rangle \wedge M\langle x^k\rangle = \langle x^k\rangle (N\wedge M\langle x^k\rangle) = \langle x^k\rangle (N\wedge M)$.

(2) Riesce $N\wedge MZ(G) \leqslant (N\wedge M)Z(G)$.

Infatti, se $g = n = mt$, con $n\in N$, $m\in M$, $t\in Z(G)$, si ha $m^{-1}n \in (N\vee M)\wedge Z(G) \leqslant$
$\leqslant N\wedge M$, sicchè $m\in M\wedge N$, e $g\in (N\wedge M)Z(G)$.

Pertanto $NZ(G)\wedge MZ(G) = Z(G)(M\wedge NZ(G)) = (N\wedge M)Z(G)$.

a due a due distinti[3], contro l'essere $n(G/Z(G))$ e quindi $n(\frac{G}{(N \wedge M)Z(G)})$ distributivo. △

---

(3) Se fosse, ad esempio, $NZ(G) = MZ(G)$, si avrebbe $NZ(G) = NZ(G) \wedge MZ(G) = (N \wedge M)Z(G)$, e $N \leqslant N \wedge NZ(G) = N \wedge (N \wedge M)Z(G) = N \wedge M$, contro l'essere $\frac{N}{N \wedge M} \neq 1$.

## BIBLIOGRAFIA


[1] M. I. Kargapolov - Ju. I. Merzljakov - Fundamentals of the Theory of Groups, Springer, Berlin 1979.

[2] P. Longobardi - M. Maj - Finite groups with nilpotent commutator subgroup, having a distributive lattice of normal subgroups, in corso di stampa su "Journal of Algebra".

[3] D. J. S. Robinson - Finiteness Conditions and Generalized Soluble Groups Part 1, 2, Springer, Berlin, 1972.

[4] M. Suzuki - Structure of a group and the structure of its lattice of subgroups, Springer, Berlin, 1956.



La presente nota è stata giudicata degna di pubblicazione da una commissione composta dai soci M. Curzio, A. Franchetta e D. greco.